

## FERIA DE VOCACIONES CIENTÍFICAS Y PROFESIONALES

16 - 17 DE OCTUBRE DE 2014. SAN CRISTÓBAL DE LA LAGUNA

Ponencia de unos 20 minutos a un grupo de unos 60 alumnos/as de secundaria (entre 15-18 años)

Título: Unas matemáticas para la vida

Ponente: Ramón Aciego de Mendoza Lugo

### GUIÓN:

- Plantear algunos “problemas raros”:
  - Solución que ya se encuentra en el encabezado
  - Faltan datos
  - Problema tipo PISA
- Definición de competencia matemática
- Qué implica afrontar la resolución de problemas
  - La resolución de problemas es algo más que la mera ejecución automática de algoritmos
- ¿Cómo enseñar y aprender las matemáticas?
  - Cálculo mental con apoyo inicial de materiales tangibles
  - Proceso de resolución de problemas
- Conclusiones: ¿Cómo desarrollar la competencia matemática?

### DESARROLLO

#### Plantear algunos “problemas raros”

##### Solución que ya se encuentra en el encabezado

- ~~“Un pastor de 27 años de edad tiene 19 cabras y 10 cochinos. ¿Qué edad tiene el pastor?”~~
- “Un grupo de 5 músicos tocan una pieza de música en 10 min. Otro grupo de 35 músicos va a reproducir la misma pieza musical. ¿Cuánto tiempo le llevará a este grupo tocar la pieza?”

##### Faltan datos

- ~~“Hay 26 ovejas y 10 cabras en un barco. ¿Cuántos años tiene el capitán?”~~
- “Mario está jugando con boliches en el parque. Mario tiene 17 boliches y su amigo Jorge le da 7. ¿Cuántos boliches tiene Jorge ahora?”

##### Problema tipo PISA

Ítems liberados de pruebas de evaluación y otros recursos

<http://www.mecd.gob.es/inee/Recursos.html>

- PISA. Matemáticas. Ejemplos de preguntas en soporte digital

GRÁFICOS

<http://erasq.acer.edu.au/index.php?cmd=cbaltemPreview&unitVersionId=139>

Pregunta 1: GRÁFICOS CM010Q01

es-ES Programme for International Student Assessment 2012

**GRÁFICOS**

Este gráfico no tiene título ni etiquetas en los ejes.

**Pregunta 1: GRÁFICOS** CM010Q01

¿Que título de gráfico y etiquetas de ejes encajan mejor con los datos anteriores?

Gráfico A **Variación de la cantidad de carbón que queda en una mina activa**

Cantidad de carbón que queda

Tiempo (meses)

Gráfico B **Variación de la temperatura máxima mensual de una ciudad**

Temperatura máxima mensual

Tiempo (meses)

Gráfico C **Variación de la masa corporal de un bebé sano**

Masa corporal

Tiempo (meses)

Gráfico D **Variación de temperatura en una taza de café caliente**

Temperatura

Tiempo (horas)

¿Qué título de gráfico y etiquetas de ejes encajan mejor con los datos anteriores?

- A. Gráfico A
- B. Gráfico B
- C. Gráfico C
- D. Gráfico D

**INTENCIONALIDAD DE LA PREGUNTA**

**Descripción:** Elegir el mejor par de variables para los datos dados que se muestran gráficamente

**Área de contenido matemático:** Cambio y relaciones

**Contexto:** Científico

**Proceso:** Interpretar

**Definición de competencia matemática**

El Programa para la Evaluación Internacional del Alumnado (PISA, por sus siglas en inglés) define la competencia matemática como la capacidad de un individuo de identificar y entender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundamentados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas, y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (PISA, 2003). Más concretamente, la operacionaliza como la capacidad del alumno para razonar, analizar y comunicar operaciones matemáticas, e implica la necesidad de utilizar el razonamiento matemático en la solución de problemas de la vida cotidiana, lo cual exige una serie de procesos diferentes que pueden agruparse en tres categorías: reproducción (operaciones matemáticas simples), conexión (combinación de ideas para resolver problemas con una solución directa) y reflexión (uso del pensamiento matemático amplio) (PISA, 2012). Es decir, los alumnos tienen primero que transformar los problemas en formas matemáticas, luego realizar operaciones matemáticas, volver a trasladar el resultado al problema original y comunicar la solución.

**Qué implica afrontar la resolución de problemas**

Según Schoenfeld (2010, 2013) para una correcta comprensión de las decisiones que toma una persona en tareas familiares como la resolución de problemas, es necesario una descripción completa de: a) los **objetivos** que la persona está tratando de lograr; b) el **conocimiento** del individuo (y de manera más amplia, los recursos a su disposición); c) las **creencias** del individuo y orientaciones (incluidas las preferencias, valores, gustos, etc.) sobre sí mismo y sobre el dominio en el que él o ella está trabajando); y d) el **mecanismo** de toma de decisiones del individuo (supervisión, autorregulación... relativos éstos a procesos metacognitivos). Para dicho autor, el analizar el proceso de solución de problemas desde un enfoque individual y en un momento temporal concreto, acarrea serias limitaciones. En este sentido, plantea como retos: a) incorporar los procesos de aprendizaje y de desarrollo a la teoría de toma de decisiones; y b) tomar en consideración que los constructos individuales son frecuentemente construidos y redefinidos en colaboración con los otros (los contextos de aprendizaje son altamente interactivos).

### **La resolución de problemas es algo más que la mera ejecución automática de algoritmos**

Los alumnos no suelen presentar dificultades al ejecutar operaciones matemáticas, sin embargo, a menudo sí las presentan cuando se trata de resolver problemas. Especialmente, cuando la demanda de la tarea no se limita a la aplicación de las operaciones aritméticas, sino que también requiere de la aplicación de conocimientos no matemáticos o que la formulación del problema contiene datos irrelevantes. Esto se debe a que los alumnos utilizan el texto del problema únicamente para elegir una (o más) de las cuatro operaciones aritméticas, presentado una dificultad en la comprensión del problema. Además, una vez han elegido la operación a realizar, la aplican automáticamente a los números que aparecen en el enunciado y el resultado obtenido entienden que es la respuesta al problema, sin verificar que la respuesta tiene sentido considerando la pregunta del problema (explica lo que, previsiblemente, pudo haber ocurrido con los “problemas raros” del Inicio).

Los problemas utilizados por PISA requieren que los alumnos hagan uso de su conocimiento matemático, pero también que atiendan a información no matemática y que discriminen aquella información que es relevante para la tarea de la que no la es. Los españoles, y en particular los canarios, no salimos muy bien parados en estos Informes PISA (nos situamos en el “pelotón” y, a veces, un tanto rezagados). Ello se puede deber, en gran parte, a que en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas insistimos más en la “*aplicación automática de las operaciones aritméticas*” que en plantear “*verdaderos problemas o retos a resolver*”. Algunos siguen considerando que una cosa es el mundo (artificial) de las matemáticas aplicadas a la resolución de problemas en la escuela y otra, muy diferente, el mundo real fuera de la escuela (Caldwell, 1995; Hidalgo, 1997).

Buena parte del tiempo que los alumnos dedican a resolver problemas de matemáticas lo hacen utilizando materiales preparados para tal fin, de entre los cuales los libros de texto tienen un papel predominante (Nathan y Koedinger, 2000; Orrantia, González y Vicente, 2005). Numerosos estudios internacionales han analizado los problemas presentados en los libros de texto (Carter, Li y Ferrucci, 1997; De Corte, Verschaffel, Janssens y Joillet, 1985; Fuson, Stigler y Bartsch, 1988; Li, 2000; Mayer, Sims y Tajika, 1995; Orrantia et al., 2005; Stigler, Fuson, Ham y Kim, 1986), concluyendo que los libros presentan y agrupan los problemas para que los alumnos los resuelvan aplicando estrategias superficiales como la “palabra clave” (más o ganar para sumar) o aplicar la operación cuyo aprendizaje sea el objetivo en ese momento concreto (por ejemplo, si los alumnos están aprendiendo a restar, todos los problemas que se le presentan se resuelven con esa operatoria). Asimismo, los problemas desafiantes, es decir los que contienen información innecesaria u omiten datos necesarios para resolver el problema, son poco frecuentes en los libros de texto. Además, la información adicional no numérica en el enunciado del problema se entiende como no relevante para su comprensión.

## ¿Cómo desarrollar la competencia matemática? (Metodología didáctica)

### ¿Pueden los niños y niñas resolver problemas que implican conceptos que aún no se les ha enseñado?

El nivel de dificultad de una tarea puede ser sensiblemente modificado simplemente adecuando el estilo del lenguaje, utilizando símbolos, diagramas o gráficos, con modelos más concretos, o con experiencias basadas en metáforas (Lesh & English, 2013). Esta es una vieja reivindicación formulada hace ya algún tiempo por Bruner (1960): A cualquier niño se le puede enseñar cualquier concepto, en cualquier momento, si el concepto se presenta en una forma que sea apropiada para su nivel de desarrollo. Las dos condiciones necesarias son que los niños y niñas: (a) encuentren sentido al problema utilizando sus propias experiencias; y (b) que tomen consciencia de que hay varias maneras diferentes de pensar sobre un problema dado y, de este modo, serán ellos mismos capaces de evaluar las fortalezas y debilidades de cada alternativa. Lesh & English (2013) ponen ejemplos de problemas enmarcados en contextos de personajes de cuentos y utilizando objetos manipulables (palillos de helado, pajitas de refrescos, tablero de puntos, piezas de circuitos de trenes...).

### Cálculo mental con apoyo inicial de materiales tangibles (las Regletas)

En el Colegio de Educación Infantil y Primaria Aguamansa (La Orotava, Tenerife) se llevaba a cabo desde hace un par de décadas hasta el curso pasado, una metodología de enseñanza cuyo principal referente es la propuesta metodológica de Constance Kamii (1985 y 1989), quien remarca la importancia de otorgarle autonomía al alumnado, y enriquecida con el uso el uso de las Regletas de Cuisenaire (Martín-Adrián, 1999).

El uso de las Regletas de Cuisenaire está destinado, básicamente, a que el alumnado aprenda la descomposición de los números e iniciarlos en las actividades de cálculo. El disponer de un material como son las regletas (juego de piezas de diez tamaños, de 1 a 10 cm., y diferentes colores) permite que su aprendizaje se transforme en algo tangible y manipulable, tan necesario en estas primeras etapas del aprendizaje, y propicia la representación y el cálculo mental en el alumnado.

La metodología educativa defendida por C. Kamii hace especial énfasis en estimular la autonomía del alumno, permitiendo la confrontación de los puntos de vista que éstos tienen respecto a un tema en concreto. De este modo, se acrecienta la capacidad del alumnado de razonar a niveles progresivamente mayores, se les anima a que tengan sus propias opiniones y se estimula que ellos mismos decidan cuando hay otra idea mejor, llegando de esta manera a las respuestas correctas (Kamii, 1994, 2012; Kamii y Russell, 2010, 2012).

[https://www.youtube.com/channel/UCLaYPuo7\\_4QMrZuw85KqN4A](https://www.youtube.com/channel/UCLaYPuo7_4QMrZuw85KqN4A)

- **ALGORITMOS PARA EL CÁLCULO MENTAL 1º PRIMARIA**
- **LA RESTA PENSANDO 5º**
- **CÁLCULO MENTAL: estrategia buscamos el 10**

### Proceso de resolución de problemas

<http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/edublogs/proyectonewton/category/principal/>

### ¿Quién pesa más?



Ordena de mayor a menor los perros según su peso.

**Los sospechosos.**

Lllaman al inspector a la escena del crimen. Hay tres sospechosos. Cuando está a punto de entrar en la habitación donde han encerrado a los sospechosos, llegan a sus oídos estas palabras: “Sólo uno de nosotros dirá la verdad; los otros dos mentirán. Seguro que eso le confunde”.

El inspector entra en la habitación y escucha las declaraciones de los sospechosos.

- LUIS: Yo no lo hice.
- LAURA: Lo hizo Luis.
- JULIO: Laura miente.

Inmediatamente el inspector descubre al culpable. ¿Sabes quién ha sido?

**Descubre el valor de cada animal**



Descubre el valor de cada animal con valores entre 1 y 9 de tal manera que sumando y restando dichos valores en línea o en columna, podamos obtener los valores reflejados en el exterior de la parilla

Para la enseñanza y el aprendizaje de resolución de problemas es imprescindible su conocimiento y aplicación práctica de tres contenidos fundamentales: los procesos heurísticos, las herramientas lógicas, los problemas y la metodología a aplicar en la sesión de trabajo con los alumnos.

Los **procesos heurísticos** que se enseñan están tomados de Polya (1945, 1954), revisados a partir de las aportaciones de Schoenfeld (1985, 2010), y consisten en una Estrategia General (proceso aplicable a cualquier problema) y unas Estrategias Específicas (indistintamente aplicables a diversos tipos de problemas).

La Estrategia General se desarrolla mediante los procesos implicados en la resolución (Polya, 1945, 1954): Comprender (leer comprensivamente), Pensar (debatir en grupo de iguales, seleccionar estrategias), Ejecutar (establecer un plan de trabajo, revisarlo y modificarlo si es necesario) y Responder (utilizar mecanismos de autocorrección). La fase de Comprender se basa en la búsqueda de los datos, su enumeración, análisis y clasificación, así como la determinación del objetivo y la conexión entre ambos (relación), que permite determinar su coherencia y eliminar así los datos no necesarios o buscar los que no están explícitos. En la fase de Pensar se desarrolla la representación (diagrama de árbol, de doble entrada, de partes/todo, tabla de verdad, diagrama lineal, etc.) y el análisis de lo obtenido en la fase anterior, investigando las situaciones implicadas para mejorar el conocimiento de todos esos elementos y poder decidir qué estrategia es más conveniente. En la fase de Ejecutar se transforma el diagrama ya utilizado para representar matemáticamente la situación. El uso del lenguaje matemático a utilizar (lógica, números, álgebra, etc.) dependerá de la estructura de la información inicial y su relación con la estrategia seleccionada. Finalmente, en la fase de Responder se vuelve a conectar con el contexto para verificar la corrección de la respuesta encontrada y la coherencia con el objetivo a alcanzar, así como un posible desarrollo posterior que profundice en la situación inicialmente planteada.

Las Estrategias Específicas (Heurísticos) son los caminos posibles que se pueden tomar a la hora de resolver una situación problemática: Básicas (Modelización, Ensayo y Error, Organización de la Información), Auxiliares (Analogía, Simplificación) y Específicas (Eliminar, Buscar Patrones, Ir Hacia Atrás, Generalización). Cada una de ellas, lleva aparejado tres aspectos fundamentales: en qué consiste, por qué se elige y cómo funciona.

Las herramientas lógicas hacen referencia a los conocimientos sobre diagramas utilizables en la representación de las situaciones matemáticas que presentan los problemas. Hay que enseñar a los alumnos los distintos tipos de diagramas, sus características, su funcionamiento, su aplicabilidad y su adaptación a las distintas situaciones. Un alumno no puede aplicar aquello que no conoce. Por tanto, hay que enseñarle a usar los diagramas, no de forma teórica sino de manera práctica, pues va a tener que aplicarlos en cada problema.

Los problemas deben ser desafíos matemáticos que han de resultar atractivos, capaces de focalizar la atención del alumnado en actividades de su interés (Rupérez y García-Déniz, 2006, 2012a, 2012b); no deben resultar evidentes en su resolución; deben afectar a aspectos matemáticos no relacionados con las últimas explicaciones de clase; conectarán distintos conceptos de la matemática; serán abiertos y con soluciones únicas o múltiples; han de admitir distintas estrategias en la búsqueda de la solución, y serán presentados en distintos formatos (sólo texto, sólo gráficos, mixtos, manipulativos, orales, etc.).

La metodología de la clase dedicada a la resolución de problemas debe diferenciarse de manera singular de la utilizada en el resto de las clases. Se ha de impulsar una dinámica de trabajo autónoma, debatiendo, aportando fundamentación,

descubriendo las relaciones e ideas por sí mismos, tomando decisiones y elaborando la respuesta en equipo. Este clima requiere tiempo y paciencia por parte del profesor, preparación minuciosa de las actividades, intervención mínima, aportando pautas y no respuestas, observando continuamente a los alumnos y tomando notas de sus intervenciones.

La actitud del profesor es fundamental. No debe dar respuestas, sino incitar a su búsqueda. Debe estar atento al modo de trabajo de cada alumno, interviniendo sólo cuando lo considere necesario para abrir un nuevo camino o para desatascar el ya emprendido. Siempre estimulando, proponiendo nuevas preguntas que hagan avanzar el proceso, dando positividad a todas las respuestas pero pidiendo mayor concreción en la argumentación. Debe preparar minuciosamente los problemas que va a presentar, no sólo para conocer todas las respuestas posibles y todos los caminos que conducen a ellas, sino también los posibles errores que se puedan cometer y las vías que puede proponer para encarrilar el proceso.



Figura. Proceso de resolución de problemas

**Conclusiones: ¿Cómo desarrollar la competencia matemática?**

Vicente, Dooren & Verschaffel (2008), en su artículo de revisión de los estudios sobre resolución de problemas realistas, sugieren que en cualquier programa de instrucción sería conveniente establecer, como objetivos mínimos y asequibles, *mejorar la calidad de los problemas que se les propone a los alumnos*, y para ello será necesario:

- Plantear problemas que **no** fomenten creencias en los alumnos de que **cualquier problema de matemáticas se resuelve mediante una operatoria**.

- **Eliminar** los *problemas con estrategias superficiales de resolución*.
- **Variar** los *tipos de problemas*, incluyendo problemas con *datos superfluos* e incluso a los que les *falte algún dato* que tengan que inferir.
- **Evitar** aquellos problemas cuyas *cantidades no se corresponden con la vida real*.
- Considerar como legítimas y válidas tanto las respuestas numéricas exactas, como las aproximaciones, *estimaciones*, etc.
- Generar ocasiones para que el *alumnado invente sus propios problemas*.

También proponen modificar la enseñanza tradicional de las matemáticas y la resolución de problemas, lo cual implica abandonar la creencia de que los problemas son meros ejercicios de práctica de operaciones aritméticas, para entender que resolver un problema es una actividad colectiva en la que:

- El conocimiento sobre el mundo real es necesario en el momento inicial de resolución.
- Hay que resolver la situación problemática y no sólo el problema de matemáticas.
- Ayudarse de una variedad de recursos para resolver la situación problemática.
- La interpretación del proceso de resolución implica la comparación de procedimientos alternativos.
- La expresión del resultado hay que fundamentarla, no limitándose a informar al resto de compañeros y al profesor.

Como conclusión de su estudio, realizan las siguientes reflexiones:

- Mientras no se produzca esa aproximación entre las clases de matemáticas y el mundo real, se seguirán obteniendo resultados negativos en los sucesivos informes de evaluación tipo PISA.
- Resulta conveniente alternar problemas tradicionales, que permiten crear vínculos sólidos entre las operaciones matemáticas y modelos de la situación prototípicos, con otros problemas que permiten relacionar situaciones del mundo real con las matemáticas.
- La mejor manera de evitar que las matemáticas y la vida escolar sean dos cosas inconexas en la vida de los alumnos, es que las entiendan como una herramienta eficaz para el análisis de cuestiones personales y de la sociedad, para lo cual han de aprender a ser sensibles a los contextos a los que se refieren los problemas y a la diversidad de perspectivas desde los que se pueden abordar.